MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DURÉE : 2 heures

Est autorisé : l'usage d'une seule calculatrice de poche y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'une imprimante.

Note importante :

Les réponses non justifiées (par une démonstration ou un résultat précis du cours) ne seront pas prises en compte.

La qualité de la rédaction (présentation, orthographe, rigueur) entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

On considère les matrices à coefficients réels :

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $a\,M_1 + b\,M_2$, où a et b sont des réels, c'est à dire :

$$E = \left\{ a\,M_1 + b\,M_2\,,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1- a) Calculer M_1^2, M_2^2, $M_1 M_2$, $M_2 M_1$. Vérifier que ces quatre matrices appartiennent à E .

b) Le produit de deux matrices quelconques de E est-il une matrice de E ?

Soient a et b deux réels et $M = a\,M_1 + b\,M_2$.

2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$M^n = 3^{n-1} a^n M_1 + 6^{n-1} b^n M_2 .$$

3- On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$ avec la convention $M^0 = I$.

a) Montrer qu'il existe deux réels α_n et β_n tels que $S_n = I + \alpha_n M_1 + \beta_n M_2$.

b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) convergent vers des réels α et β que l'on exprimera en fonction de a et b.

On rappelle que pour tout x réel : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

On pose $\mathrm{e}^M = I + \alpha\,M_1 + \beta\,M_2$, ce qui permet de définir e^M pour toute matrice M de E.

4- Soient M et M' deux matrices de E.
Montrer l'égalité : $\mathrm{e}^M \times \mathrm{e}^{M'} = \mathrm{e}^{M+M'}$.

Exercice 2

1- Question préliminaire.

Soit λ un réel strictement positif. Calculer les trois intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt \quad ; \quad J = \int_0^{+\infty} t\,e^{-\lambda t}\,dt \quad ; \quad K = \int_0^{+\infty} t^2\,e^{-\lambda t}\,dt .$$

La durée de vie exprimée en mois, d'un insecte d'une certaine espèce, est une variable aléatoire notée Z dont une densité de probabilité est la fonction f suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}05\,e^{-0{,}05x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2- Étude de la variable aléatoire Z.

a) Déterminer la fonction de répartition de Z.

b) Déterminer l'espérance mathématique et la variance de Z.

c) Déterminer la médiane de Z, c'est-à-dire le réel m vérifiant $P([Z \geq m]) = P([Z \leq m]) = \frac{1}{2}$.

d) Sachant qu'au bout d'un an l'insecte est toujours vivant, quelle est la probabilité qu'il vive au moins deux ans de plus ?

Deux insectes A et B de cette espèce sont élevés ensemble dans l'une des vitrines du Museum d'Histoire Naturelle de Paris. On note X et Y les durées de vie respectives de A et B et on suppose que les variables aléatoires X et Y suivent la même loi que Z.
On suppose en outre que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
On note :

T le temps qui s'écoule jusqu'à ce que l'un des deux insectes (A ou B) meure ;

S le temps qui s'écoule jusqu'à ce que les deux insectes (A et B) meurent.

3- Étude de la variable aléatoire T.

a) Pour tout réel positif t, exprimer l'événement $[T > t]$ à l'aide des événements $[X > t]$ et $[Y > t]$, puis en déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

b) Déterminer une densité de T.

c) Déterminer l'espérance mathématique, la variance et la médiane de T.

4- Étude de la variable aléatoire S.

a) Soit s un réel positif, en utilisant les variables aléatoires X et Y exprimer l'événement $[S \leq s]$. En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire S.

b) Déterminer une densité de S.

c) Déterminer l'espérance mathématique, la variance et la médiane de S.

FIN